A 54-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Sibiu, 24 aprilie 2003

Al doilea test de selecţie pentru OBM şi OIM – Seniori 2003

SOLUŢII

Subiectul 1

Fie $x \notin \mathbf{Q}$. Din Teorema lui Kronecker, alegem n astfel că $nx = N_n + \alpha_n$, unde $N_n \in \mathbf{N}$ şi $\alpha_n \in \left[0, \frac{1}{2^m}\right)$. Atunci $2^k nx = 2^k N_n + 2^k \alpha_n$ şi $[2^k nx] = 2^k [nx]$ pentru $k = 0, 1, \ldots, m$ deci şirul $([2^k nx])_{k=\overline{0,m}}$ este o progresie geometrică de raţie 2.
Pentru raţie mai mare decât p este suficient să aplicăm rezultatul precedent pentru o subprogresie.

Subiectul 2

Presupunem că există $p, q \in \mathbf{Z}[x]$ cu $\mathrm{gr}\, p, \mathrm{gr}\, q < 2n$ $(n = \mathrm{gr}\, f)$ cu $g = p \cdot q$. Dacă $\alpha \in \mathbf{C}$ cu $f(\alpha) = 0$ rezultă $p(\sqrt{\alpha}) = 0$. Dezvoltând $p(\sqrt{\alpha})$ obţinem $t, u \in \mathbf{Z}[x]$ astfel încât $t(\alpha) + \sqrt{\alpha} u(\alpha) = 0$ cu $\mathrm{gr}\, t$, $u \leq \frac{1}{2} \mathrm{gr}\, p < n$. Cum $u \neq 0$ şi $(u, f) = 1$ rezultă că exită $s, r \in Q[x]$ cu $su + rf = 1$, deci $s(\alpha)u(\alpha) = 1 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = -t(\alpha)s(\alpha) \Rightarrow \alpha = t^2(\alpha)s^2(\alpha)$. Dacă $m = t^2 s^2 - X$, atunci $m(\alpha) = 0$ deci $f | m$. Rezultă că $m(\alpha_1) = m(\alpha_2) = \cdots = m(\alpha_n) = 0$ unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ sunt rădăcinile lui $f \Rightarrow \alpha_i = t^2(\alpha_i)s^2(\alpha_i)$, $\forall\, i = \overline{1,n} \Rightarrow \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = (ts)^2(\alpha_1)(ts)^2(\alpha_2) \cdots (ts)^2(\alpha_n) = a^2$ cu $a \in \mathbf{Q}$. Cum $f(0) = (-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n \in \mathbf{Z}$, rezultă că $a \in \mathbf{Z}$ şi $|f(0)| = a^2$, fals.

Subiectul 3

Varianta I. Fixăm o distribuţie a problemelor; notăm $c_i, c_j \in \overline{1, 2n}$, $c_i \to c_j$ atribuirea problemei propuse de c_i lui c_j. Un şir $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ se numeşte *clică* dacă $c_i \neq c_j$ pentru $i \neq j$, $c_i - \min\limits_{i=1,k} c_i$ şi $c_1 \to c_2 \to c_3 \to \cdots \to c_k \to c_1$.
Un concurs este corect dacă şi numai dacă toate clicile au lungime pară.
Dacă unei clici pare îi asociem perechea de mulţimi de perechi disjuncte

$$(\{\{c_1, c_2\}, \{c_3, c_4\}, \ldots, \{c_{2k-1}, c_{2k}\}\}, \{\{c_2, c_3\}, \{c_4, c_5\}, \ldots, \{c_{2k}, c_1\}\})$$

şi unui concurs corect îi asociem o pereche de partiţii în perechi a mulţimii $\overline{1, 2n}$.
Reciproc, pentru o pereche de partiţii în perechi (A, B) a lui $\overline{1, 2n}$, notăm $\alpha(c) = c'$, $\beta(c) = c''$ dacă $\{c, c'\} \in A$, $\{c, c''\} \in B$. Perechii de două partiţii (A, B) îi asociem distribuţia

$$1 \to \alpha(1) \to \beta_{\alpha(1)} \to \alpha\beta_{\alpha(1)} \to \cdots;$$

după completarea clicii lui 1, începem o nouă clică cu $m =$ cel mai mic dintre elementele rămase:

$$m \to \alpha(m) \to \beta_{\alpha(m)} \to \alpha\beta_{\alpha(m)} \to \cdots.$$

Deci mulţimea de partiţii în clici pare este în bijecţie cu pătratul cartezian al mulţimii de partiţii în perechi.

Varianta II. Fiecare repartizare a problemelor corespunde bijectiv unei permutări a mulţimii $A_n = \{1, 2, \ldots, 2n\}$. Este uşor de observat că o permutare este asociată unui concurs corect dacă şi numai dacă A_n se poate partiţiona în două mulţimi M_1, M_2, cu câte n elemente, astfel încât imaginile elementelor din M_1 sunt în M_2, ceea ce se petrece dacă permutarea se poate descompune în produs de cicluri având un număr par de elemente. Să notăm a_n numărul de asemenea permutări ale mulţimi A_n. Numărul permutărilor pentru care 1 face parte dintr-un ciclu cu $2k$ elemente, $k \in \overline{1,n}$ este $\binom{2n-1}{2k-1} \cdot (2k-1)! a_{n-k}$, pentru că putem alege elementele ciclului în $\binom{2n-1}{2k-1}$ moduri, le putem ordona în $(2k-1)!$ moduri şi putem "completa" permutarea în a_{n-k} moduri.
Obţinem $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ şi

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{2k-1}(2k-1)! a_{n-k} = (2n-1)a_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{2n-1}{2k-1}(2k-1)! a_{n-n} \\ &= (2k-1)! a_{n-1} + (2n-1)(2n-2) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-3}{2k-1} \cdot (2k-1)! a_{n-k-1} \\ &= (2n-1)a_{n-1} + (2n-1)(2n-2)a_{n-1} = (2n-1)^2 a_{n-1}. \end{aligned}$$

Rezultă imediat $a_n = 1^2 \cdot 3^2 \cdot \cdots \cdot (2n-1)^2$.